

ANALISIS VEKTOR (C)

BAB 4

Rangkuman Buku Schaum Materi dan Contoh Soal Integral Garis dan Aplikasinya

Kelompok 4

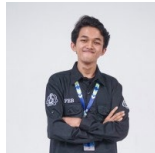
Anggota Kelompok 4 :



Irvan Abdul Rahman 5002221044



Komang Ryandhi Suandita 5002211109



Mohammad Febryan Khamim 5002221072



Umar El – Farouk Ambary 5002211142

DAFTAR ISI

1

Operator Vektor Delta

2

Integral Garis

3

Integral Permukaan

4

Integral Volume

ANALISIS VEKTOR (C)

4.1 Operator Vektor Delta (∇)

➤ Operator Vektor Delta (∇)

Vektor ini memiliki sifat-sifat yang serupa dengan vektor biasa. Berguna untuk mendefinisikan tiga kuantitas yang muncul dalam aplikasi praktis dan dikenal sebagai gradien, divergensi, dan curl. Disimbolkan dengan Nabla (∇)

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$$

➤ Operator Gradien

Komponen dalam arah vektor $\nabla\phi$ satuan a diberikan oleh $\nabla\phi \cdot a$ dan disebut turunan arah ϕ dalam arah a . Anggap $\phi(x, y, z)$ merupakan fungsi skalar.

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \phi(x, y, z)$$

SKALAR → VEKTOR

➤ **Sifat-sifat Operator Gradien**

Misalkan fungsi skalar $\phi(x, y, z)$ dan $\varphi(x, y, z)$ terdefinisi dan diferensiabel pada setiap titik (x, y, z) dalam ruang berdimensi R^3 , dan C adalah bilangan real maka berlaku sifat-sifat berikut ini :

1. $\nabla(\phi + \varphi) = \nabla\phi + \nabla\varphi$
2. $\nabla(C\phi) = C\nabla\phi$
3. $\nabla(\phi\varphi) = \phi\nabla\varphi + \varphi\nabla\phi$

➤ Operator Divergensi

$$\nabla \cdot V = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) (v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k})$$

VEKTOR → SKALAR

➤ **Sifat-sifat Operator Divergensi**

Misalkan fungsi vektor $\mathbf{F}(x, y, z)$ dan $\mathbf{G}(x, y, z)$ terdefinisi dan dapat diturunkan pada tiap titik di setiap (x, y, z) pada R^3 maka $\mathbf{F}$ dan $\mathbf{G}$ memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $\nabla \cdot (a\mathbf{F} + b\mathbf{G}) = a(\nabla \cdot \mathbf{F}) + b(\nabla \cdot \mathbf{G})$
2. $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \nabla\phi \cdot \mathbf{F}$
3. $\nabla(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{G} + \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$
4. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

➤ Operator Curl

$$\nabla \times V = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k})$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

➤ Operator Curl

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} v_3 - \frac{\partial}{\partial z} v_2 \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_3 - \frac{\partial}{\partial z} v_1 \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} v_2 - \frac{\partial}{\partial y} v_1 \right) \hat{k}$$

➤ **Sifat-sifat Operator Divergensi**

Misalkan fungsi vektor $\mathbf{F}(x, y, z)$ dan $\mathbf{G}(x, y, z)$ terdefinisi dan dapat diturunkan pada tiap titik di setiap (x, y, z) pada R^3 maka $\mathbf{F}$ dan $\mathbf{G}$ memenuhi sifat-sifat berikut.

$$1. \nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = (\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{G})$$

$$2. \nabla \cdot (a\mathbf{F}) = a(\nabla \cdot \mathbf{F})$$

$$3. \nabla \times \phi \mathbf{F} = (\nabla \phi) \times \mathbf{F} + \phi (\nabla \times \mathbf{F})$$

$$4. \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \times \mathbf{F}$$

$$5. \nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$$

$$6. \nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G})$$

➤ **CONTOH SOAL**

Jika $\phi(x, y, z) = c$ menyatakan persamaan permukaan benda dalam ruang. Tunjukkan grad $\phi(x, y, z)$ tegak lurus permukaan $\phi(x, y, z) = c$ dan dapatkan formula vektor normal $\phi(x, y, z)$ pada titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

PEMBAHASAN

- Ambil sembarang titik $P(x, y, z)$ pada permukaan bidang $\phi(x, y, z) = C$

Diperoleh vektor posisi dari persamaan $\phi(x, y, z) = C$ di P adalah sebagai berikut.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

Sehingga, diperoleh vektor singgung permukaan adalah :

$$\overrightarrow{dr} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

PEMBAHASAN

➤ Diferensialkan $\phi(x, y, z)$

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 0$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}) = 0$$

$$\bar{\nabla}\phi \cdot dr = 0$$

Maka $\bar{\nabla}\phi$ tegak lurus dengan dr . Sehingga, $\bar{\nabla}\phi$ tegak lurus dengan garis singgung permukaan pada $\phi(x, y, z) = c$ di P

PEMBAHASAN

- Diperoleh $\bar{\nabla}\phi$ searah dengan Vektor Normal Permukaan N

Vektor Normal Satuan

$$N = \frac{\bar{\nabla}\phi}{|\bar{\nabla}\phi|}$$

MEDAN VEKTOR KONSERVATIF

Sebuah medan vektor yang diturunkan dari sebuah medan skalar ϕ sedemikian hingga $V = \bar{\nabla}\phi$ disebut sebagai MEDAN VEKTOR KONSERVATIF, sedangkan ϕ potensial skalar. Sedangkan :

$$V = \bar{\nabla}\phi \rightarrow \bar{\nabla} \times F = 0$$

CATATAN

- Vektor $\vec{v}$ **SOLONOIDAL** jika $\text{div } \vec{v} = 0$, dapat dituliskan $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
- Vektor $\vec{v}$ **IRROTATIONAL** jika rotasi $\vec{v} = 0$, dapat dituliskan $\nabla \times \vec{v} = 0$



ANALISIS VEKTOR (C)

4.2 Integral Garis

Misal titik A dan titik B dihubungkan oleh Kurva C dengan busur C diberikan oleh persamaan parametrik:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$$

- **Medan Vektor**

$$F = F_1(x, y, z)\hat{i} + F_2(x, y, z)\hat{j} + F_3(x, y, z)\hat{k}$$

Tiap titik C menentukan vektor posisi P pada C, misal vektor posisi $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, maka:

$$\int_A^B F \cdot dr = \int_A^B F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz$$

Karena kurva C dinyatakan dalam persamaan parametrik, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^B [F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz] \frac{dt}{dt} \\ &= \int_A^B [F_1(x, y, z) \frac{dx}{dt} + F_2(x, y, z) \frac{dy}{dt} + F_3(x, y, z) \frac{dz}{dt}] dt\end{aligned}$$

CATATAN

Jika $\mathbf{F}$ gaya yang bekerja untuk memindahkan partikel sepanjang kurva C dari A ke B, maka

- **Usaha dari $\mathbf{F}$** = $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

Jika $\mathbf{v}$ menyatakan kecepatan pada fluida, maka

- **Sirkulasi dari $\mathbf{V}$** = $\int_A^B \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$

CONTOH SOAL

Hitung $\int_C 2 + x^2y \, dS$ dengan C merupakan lintasan setengah lingkaran bagian atas

$$x^2 + y^2 = 1$$

Pembahasan :

$$\begin{aligned} dS^2 &= dx^2 + dy^2 \\ dS &= \sqrt{(dx^2 + dy^2)} \frac{dt}{dt} \\ dS &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

Pembahasan :

Misalkan $x = \cos t$ dan $y = \sin t$

$$= \int_C 2 + x^2 y \, dS$$

$$= \int_C 2 + x^2 y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

$$= \int_0^\pi 2 + (\cos t)^2 (\sin t) \sqrt{((- \sin t)^2 + (\cos t)^2)} dt$$

$$= \int_0^\pi 2 + (\cos t)^2 (\sin t) dt$$

Pembahasan :

$$= \int_0^{\pi} 2 + (\cos t)^2 (\sin t) dt$$

Misalkan $p = \cos t$ sehingga diperoleh $dp = -\sin t dt$. Maka $\sin t dt = -dp$

Batas daerah :

Batas Atas

$$p = -1$$

Batas Bawah

$$p = 1$$

Sehingga, diperoleh:

$$= - \int_1^{-1} 2 + p^2 dp$$

Pembahasan :

$$\begin{aligned} &= - \int_1^{-1} 2 + p^2 dp \\ &= - \left[2p + \frac{1}{3} p^3 \right] \Big|_1^{-1} \\ &= - \left(2(-1) + \frac{1}{3} (-1)^3 - \left[2(1) + \frac{1}{3} (1)^3 \right] \right) \\ &= - \left[-2 - \frac{1}{3} - 2 - \frac{1}{3} \right] \\ &= - \left[-4 - \frac{2}{3} \right] \\ &= - \left[-\frac{14}{3} \right] \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Persamaan Integral Garis

Misal C kurva ruang mulus dan diberikan persamaan parametrik:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$$

Diperoleh persamaan integral garisnya adalah :

$$= \int_c f(x, y, z) dS$$

Karena diketahui $dS = \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)} dt$

$$\int_c f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)} dt$$

Aplikasi Integral Garis

Untuk memindahkan partikel dari $x = a$ hingga $x = b$ pada lintasan C, diperoleh bahwa **usaha**-nya dirumuskan sebagai berikut.

$$W = \int_c F \cdot dr$$

Aplikasi Integral Garis

Misal vektor gaya $F = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ merupakan gaya pada sepanjang vektor C, diperoleh usahanya adalah :

Pembahasan :

$$W = \int_c F \cdot dr = \int_c Mdx + Ndy + Pdz$$

CONTOH SOAL APLIKASI INTEGRAL GARIS

Hitunglah usaha $W = \int_C F \cdot dr$, di mana F adalah gaya yang diberikan oleh persamaan

$F = -y\hat{i} + xy\hat{j}$ dan C merupakan kurva seperempat lingkaran yang terletak pada kuadran I dengan pusat $O(0,0)$ dengan $r = 1$!

PEMBAHASAN

Berdasarkan soal, diperoleh persamaan lingkaran : $x^2 + y^2 = 1$

Misalkan $x = \cos t$ dan $y = \sin t$, dan $r = x\hat{i} + y\hat{j}$ sehingga $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j}$

$$W = \int_C F \cdot dr = \int_C (-x\hat{i} + xy\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j})$$

Pembahasan :

Kurva C merupakan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ yang dapat diubah ke bentuk fungsi parametrik $x(t) = \cos t$ dan $y(t) = \sin t$.

$$\mathbf{F} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \sin t \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (-y \mathbf{i} + xy \mathbf{j}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \sin t \mathbf{j}) \cdot (-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 t + \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt + \cos^2 t \sin t \right) dt \end{aligned}$$

Pembahasan :

Misalkan $u = \cos t, du = -\sin t \, dt$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \, dt - \int_1^0 u^2 \, du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) \, dt + \int_0^1 u^2 \, du \\ &= \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} u^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

CONTOH SOAL APLIKASI INTEGRAL GARIS

Hitung usaha yang dihasilkan sebuah obyek yang bergerak dalam vector $\mathbf{F} = y \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}$ sepanjang kurva $x = 2t, y = t^2 - 1$ dari $t = 0$ hingga $t = 2$.

Pembahasan :

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (y \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j}) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}) \\
 &= \int_C (y dx + x^2 dy) \\
 &= \int_0^2 ((t^2 - 1) 2 dt + (2t)^2 2t dt) \\
 &= \int_0^2 (2t^2 - 2 + 8t^3) dt \\
 &= \left(\frac{2}{3} t^3 - 2t + 2t^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{100}{3}
 \end{aligned}$$

Teorema Green

Jika R suatu daerah tertutup di bidang XY yang dibatasi oleh kurva tertutup sederhana C dan jika M dan N adalah fungsi-fungsi kontinu dari x dan y yang mempunyai derivatif-derivatif parsial kontinu dalam R , maka:

$$\oint_C M \, dx + N \, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy$$

Atau

$$\iint_R (\text{rot}_z \mathbf{F}) \, dx \, dy = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$$

Contoh Soal

Hitung $\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^1 + 1}) dy$ Jika C adalah kurva lingkaran: $x^2 + y^2 = 9$

Pembahasan :

$$\begin{aligned}\oint_C (3y - e^{\sin x}) dx + (7x + \sqrt{y^1 + 1}) dy &= \iint_R 7 - 3 \, dx \, dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 4r \, dr \, d\theta \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^3 d\theta \\ &= 16 \times \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} = 36\pi\end{aligned}$$

Contoh Soal

Tunjukkan bahwa luas yang dibatasi oleh lingkaran kurva tertutup sederhana C diberikan oleh

$$\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

Pembahasan :

Dengan Teorema Green

Misalkan $M = -y$, $N = x$

$$\oint_C x dy - y dx = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dx dy = 2 \iint_R dx dy = 2A$$

Dimana A ada luas yang dibuthkan, maka

$$A = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$$

ANALISIS VEKTOR (C)

4.3 Integral Permukaan

➤ Integral Permukaan

Dengan persamaan $z = g(x, y)$:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dA$$

Dengan S adalah integral permukaan benda dan D adalah proyeksi S pada bidang xy .

Jika permukaan S yang diberikan oleh $f(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, vektor normal permukaan S :

$$\mathbf{n} dS = \frac{\nabla f(x, y, z)}{|\nabla f(x, y, z)|} dS = \frac{-g_x(x, y) \mathbf{i} + -g_y(x, y) \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{(g_x(x, y))^2 + (g_y(x, y))^2 + 1}} \sqrt{(g_x)^2 + (g_y)^2 + 1} dA$$

Didapat $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D (-P \, g_x - Q \, g_y + R) \, dA$

Dapat diorientasikan dalam bentuk vektor $\mathbf{r}(u, v)$, maka

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \Rightarrow \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA$$

Teorema Stokes dapat dipandang sebagai teorema Green dengan dimensi yang lebih tinggi. Integral tertutup sederhana C yang membatasi permukaan S , untuk medan vektor $\mathbf{F}$ sama dengan integral permukaan dari $\text{Curl } \mathbf{F}$ melalui atas permukaan S , tertuang dalam *teorema Stokes* sebagai berikut:

Teorema Stokes:

Suatu permukaan S yang dibatasi oleh lintasan tertutup C , maka untuk medan vector:

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k} \text{ berlaku :}$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

dimana $\mathbf{n}$ = Unit vektor normal positif pada S .

Contoh Soal :

Gunakan teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ dengan $\mathbf{F} = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} - xy \mathbf{k}$ dimana S adalah permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ yang terletak dalam silinder $x^2 + y^2 = 1$.

Pembahasan :

Kurva C adalah perpotongan bola dengan silinder : $z^2 = 3$ atau $z = \sqrt{3}$

C adalah lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ pada bidang $z = \sqrt{3}$

Vektor posisi C adalah $\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + \sqrt{3} \mathbf{k}$, $\mathbf{r}' = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$ dan
 $\mathbf{F} = \sqrt{3} \sin t \mathbf{i} + \sqrt{3} \cos t \mathbf{j} - \cos t \sin t \mathbf{k}$

Sesuai dengan teorema Stokes:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) \, dt = \int_0^{2\pi} -\sqrt{3} \sin^2 t + \sqrt{3} \cos^2 t \, dt = \sqrt{3} \int_0^{2\pi} \cos 2t \, dt = 0$$

Contoh Soal :

Buktikan $\oint \mathbf{dr} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} dS$

Pembahasan :

Dengan Teorema Stokes, $A = B \times C$ dimana C adalah vektor konstan

$$\oint \mathbf{dr} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \iint_S [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})] \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint \mathbf{C} \cdot (\mathbf{dr} \times \mathbf{B}) = \iint_S [(\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} dS$$

Pembahasan :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} \cdot \oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} &= \iint_S [(\mathbf{C} \cdot \nabla)\mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_S [\mathbf{C}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} \, dS \\
 &= \iint_S \mathbf{C} \cdot [\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n})] \cdot \mathbf{n} \, dS - \iint_S \mathbf{C} \cdot [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \cdot \mathbf{n} \, dS \\
 &= \mathbf{C} \cdot \iint_S [\nabla(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{B})] \, dS \\
 &= \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, dS
 \end{aligned}$$

Karena $\mathbf{C}$ adalah vektor konstanta sembarang maka,

$$\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} \, dS$$

ANALISIS VEKTOR (C)

4.4 Integral Volume

Konsep Dasar

Integral benda pejal (volume) dari sebuah medan vektor $\mathbf{F} = Mi + Nj + Pk$ dimana M, N dan P mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada benda pejal tertutup V yang mempunyai batas permukaan S . Jika $\mathbf{n}$ vektor normal satuan keluar terhadap S , ekuivalen dengan integral dari $\text{div } \mathbf{F}$ atas volume V yang dituangkan dalam **Teorema Gauss** sebagai berikut:

Teorema Gauss/Gauss's Divergence Theorem:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \text{div } \mathbf{F} \, dv$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\iint_S (M \cos \alpha + N \cos \beta + P \cos \gamma) \, dK = \iiint_V \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) dv$$

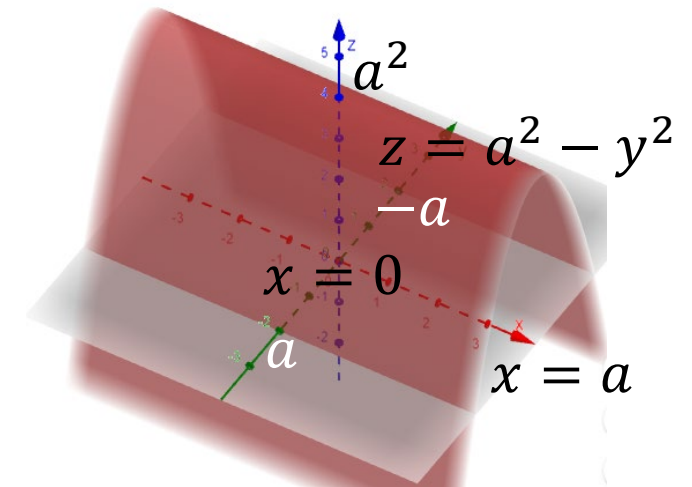
Contoh Soal :

Diberikan vektor gaya $\vec{A} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$ dan S adalah permukaan daerah yang dibatasi oleh $z = a^2 - y^2$, $x = 0$, $x = a$, dan bidang xy . (a adalah nilai konstan)

- Gambarkan geometri Batasan permukaan benda!
- Hitunglah $\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$ dengan menggunakan Gauss's Divergence Theorem!

Pembahasan :

- Perhatikan bahwa $S: z = a^2 - y^2$ merupakan parabola terhadap bidang yz .
 $x = 0$ dan $x = a$.



Gambar Ilustrasi (a)

b) Gauss's Divergence Theorem:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv$$

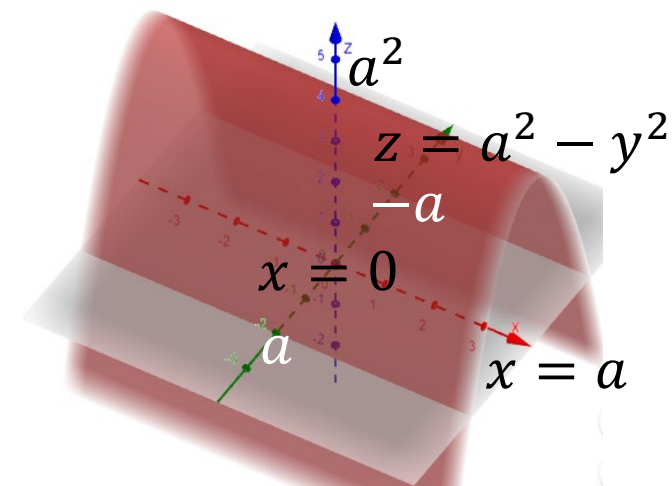
dengan $\mathbf{n}$ adalah vektor normal satuan keluar terhadap S .

$$\bar{\mathbf{A}} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$$

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy + z) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x + 3y) = 4y$$

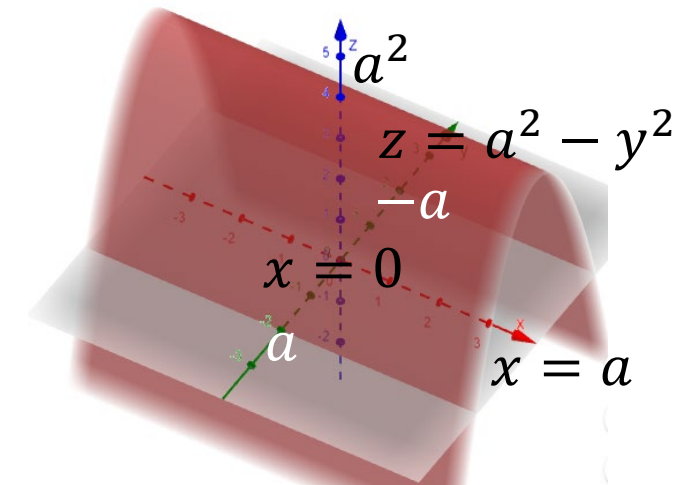
dengan Teorema Gauss

$$\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{x=0}^a \int_{y=-a}^a \int_{z=0}^{a^2-y^2} 4y \, dz dy dx$$



4.3 Integral Permukaan

$$\begin{aligned} &= \int_{x=0}^a \int_{y=-a}^a 4y(a^2 - y^2) dy dx \\ &= 2 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a 4ya^2 - 4y^3 dy dx \\ &= 2 \int_{x=0}^a a^4 dx \\ &= 2a^5 \end{aligned}$$



Contoh Soal :

Tentukan volume luas daerah persekutuan silinder yang berpotongan $x^2 + y^2 = a^2$ dan $x^2 + z^2 = a^2$

Pembahasan :

Volume yang diperlukan = 8 kali wilayah volume yang ditampilkan

$$\begin{aligned}
 &= 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz dy dx \\
 &= 8 \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy dx \\
 &= 8 \int_{x=0}^a (a^2-x^2) dx \\
 &= \frac{16a^3}{3}
 \end{aligned}$$

